Farkas Beáta – Pelle Anita (szerk.) 2017: Várakozások és gazdasági interakciók. JATEPress, Szeged, 13–26. o.

Demográfiai sokk Solow növekedési modelljében

Bessenyei István

Ez az alapvetően elméleti jellegű tanulmány Solow neoklasszikus növekedési modelljének keretében vizsgálja a migrációs nyomás gazdasági növekedésre kifejtett hatását. Az egyensúlyi növekedési pálya stabilitásának köszönhetően ez az elemzési keret alkalmas olyan vizsgálatok elvégzésére, melyek célja a munka szintjében, vagy növekedési rátájában bekövetkező növekedés következményeinek felmérésére. Megmutatjuk, hogy a munka gyorsabb növekedése a GDP magasabb természetes növekedési rátáját, de az egy főre eső GDP alacsonyabb szintjét eredményezi, míg utóbbi egyensúlyi növekedési rátája nem változik. Egy másik következmény a beruházások átmeneti visszaesése. A tőke és munka közti nagyfokú helyettesíthetőség esetén a GDP természetes növekedési rátáját meghaladó endogén növekedés lehetséges, de a tartós bevándorlás csökkenti ezt a növekedési rátát. A helyettesítés alacsony rugalmassága esetén azonban a migrációs nyomás az egy főre eső GDP tartós csökkenését eredményezheti.

Kulcsszavak: gazdasági növekedés, demográfiai sokk, exogén és endogén növekedés

1. Bevezetés

Ebben a tanulmányban a népesség, és ezáltal a termelésben rendelkezésre álló munka mennyiségében bekövetkező növekedés következményeit mérjük fel egy neoklasszikus növekedési modell (Solow 1956) keretei közt. Vizsgálódásaink során figyelembe vesszük a technikai haladást csakúgy, mint a tőke és munka közti helyettesítés egységnyitől eltérő rugalmasságának lehetőségét. Mivel nem áll rendelkezésre elegendő információ arra vonatkozóan, hogy a felhasználható munka mennyiségének növekedését eredményező jelenlegi migrációs folyamatok a jövőben miként fognak folytatódni, célunk elsősorban a várható változások irányának előrejelzése, s nem az érintett gazdaságokra vonatkozó, számszerűsített eredmények bemutatása.

1956-ban jelent meg a *Quartely Journal of Economics* hasábjain Solow növekedési modellje, mely eleinte heves bírálatokat váltott ki, majd 1987-ben szerzője Nobel díjat kapott. Romer (2006) haladó szintű tankönyve már ezzel kezdi a makroökonómia tárgyalását csakúgy, mint McCandless (2008) a reál üzleti ciklus bevezetését. De nem hiányzik a modell ismertetése például Williamson (2009) középfokú tankönyvéből sem.

Hosszan lehetne idézni a Solow cikkét ért kritikákat, ez azonban most nem célunk. Szükséges azonban megjegyezni, hogy ez a neoklasszikus növekedési modell minden naivitása ellenére jobban illeszkedik a hosszú távon megfigyelt gazdasági folyamatokhoz, mint a korábbi postkeynesi modellek [(mint Harrod (1948) vagy Domar (1946)]. Erről számos középfokú tankönyv tanúskodik [például Williamson (2009) vagy Jones (2001)]. Így célszerű a migráció gazdasági növekedésre kifejtett hatásának vizsgálata során Solow növekedési modelljét választani kiindulópont gyanánt. Másrészt az utóbbi időben kibontakozó folyamatok demográfiai következményei egyelőre nem láthatók pontosan. Még azt sem tudjuk, hogy például a Németországba érkező migráns tömegek által előidézett demográfiai sokk mennyire perzisztens, azaz csupán:

1. a népesség egyszeri, sokkszerű növekedését eredményezik, vagy
2. akár a későbbiekben folyamatossá váló bevándorlás, akár a népesség szaporodási ütemének változása következtében a gazdaság rendelkezésére álló munka mennyiségének növekedési üteme is emelkedni fog.

Az első esetet migrációs sokknak, a másodikat migrációs nyomásnak fogjuk nevezni. A jelenleg zajló folyamatok nagyságrendjének illusztrációja céljából csupán két adatot említünk az Eurostat adatbázisából: a benyújtott menedékkérelmek összes lakoshoz viszonyított aránya 2015-ben Magyarországon 1,8%, Németországban pedig 0,6% volt.

Solow modellje a népesség exogén konstans növekedési rátájának feltételezéséből indul ki. Ezt bírálva Cigno (1981) olyan modellt konstruált, ahol a népesség növekedési ütemét az egy főre eső fogyasztás és tőke határozza meg. E modell egyszerűsített változata Barro és Sala-i-Martin (1995) könyvében megtalálható. A jelen tanulmány azonban más utat követ: nem célunk a migrációs folyamat magyarázata, ezért azt exogén adottságként kezeljük. A várható következmények felmérése során pedig csupán néhány lehetséges forgatókönyv felvázolására vállalkozunk a neoklasszikus növekedési modell szabta keretek között.

Fölösleges lenne a modell valamennyi feltevésének részletezése, hisz ezek a legtöbb tankönyvben megtalálhatók. Néhányat mégis érdemes kiemelni:

– Minden magtakarítás automatikusan beruházássá válik, és nincsenek téves beruházási döntések.
– A munka homogén, továbbá a gazdaság a rendelkezésére álló munka minden mennyiségét felhasználja, azaz nincs munkanélküliség.

Mivel a bevándorlók gazdasági és kulturális asszimilációjának sebességéről és erőforrásigényéről jelenleg semmiféle információ nem áll rendelkezésre, a fentieket egy, a neoklasszikus gondolati rendszerbe jól illeszkedő további feltevéssel egészítjük ki:

- A migránsok a bennük megtestesülő emberi tőke révén azonnal és költségmentesen integrálódnak. Ugyanakkor a migráció nem jár együtt a fizikai tőkejavak mobilitásával.

E föltevések naivitása nyilvánvaló, a neoklasszikus növekedéselmélet keretei közt mégis szükségesek. Következtetéseink és eredményeink tehát erős optimizmust fognak tükrözni.

Figyelembe véve a technikai haladást, az aggregált termelési függvény:

$$Y(t) = A(t)F\big(K(t), L(t)\big), \text{ ahol } A(t) = e^{gt}, \tag{1}$$

ahol $Y(t)$ a kibocsátás, $K(t)$ pedig a termeléshez felhasználható tőke állománya a t időpontban, $L(t)$ a felhasználható munka mennyisége, F pedig egy folytonos, lineárisan homogén függvény. Ha g exogén konstans, akkor exogén technikai haladásról beszélünk. Kónya (2015) meghatározását követve azt az állandósult állapotot tekintjük hosszú távon egyensúlyinak, melyben valamennyi endogén változó növekedési rátája konstans. Exogén technikai haladás jelenlétében ilyen egyensúlyi állapotot Solow (1956) cikkében nem keres, de későbbi munkájában (Solow 1970) megjegyzi, hogy ha a gazdaság egyszerű növekedési modellje exogén technikai haladást tartalmaz, annak munkanövelőnek kell lennie. A bizonyítás Uzawa (1960) cikkében található. Az egyszerűbb írásmód érdekében mellőzve annak jelölését, hogy az egyes változók maguk is az idő függvényei, munkanövelő technikai haladás esetén az aggregált termelési függvényt az alábbi módon írjuk fel:

$$Y = F\big(K, \overline{L}\big) = F\big(K, e^{mt}L\big), \tag{2}$$

ahol $\overline{L} = e^{mt}L(t)$ az úgynevezett hatékony munka. Megjegyzendő továbbá, hogy az $Y = e^{gt}K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ lineárisan homogén Cobb–Douglas típusú termelési függvény $m = g/(1-\alpha)$ helyettesítés révén egyszerűen átírható a munkanövelő technikai haladást reprezentáló fenti alakra. Az m exogén paraméter értékét a továbbiakban a technikai haladás rátájának fogjuk tekinteni. A technikai haladás munkanövelő jellegét számos empirikus vizsgálat támasztja alá, például (Acemoglu 2002), vagy (Klump et al. 2007).

A hosszú távú egyensúly meghatározásához olyan változókat keresünk, melyek egyensúlyi értéke konstans. Ehhez a (2) termelési függvény lineáris homogenitását kihasználva, azt az alábbi intenzív formára írjuk át:

$$\bar{y} = \frac{Y}{\bar{L}} = F\left(\frac{K}{\bar{L}},1\right) = f\left(\bar{k}\right), \tag{3}$$

ahol $\bar{y}$ az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás, $\bar{k}$ pedig a hatékony tőkeintenzitás. Az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás definíciójából következik továbbá, hogy

$$\hat{y} = \hat{\bar{y}} + m, \tag{4}$$

ahol az egyes változókat jelölő szimbólum fölé írt kalap azok növekedési rátáját jelöli. y az egységnyi munkára eső kibocsátás, vagy egy főre eső GDP, $\hat{y}$ tehát ennek növekedési rátája. Mivel a további elemzés középpontjában az egy főre eső GDP áll, érdemes megjegyezni, hogy szigorúan monoton növekvő $f\left(\bar{k}\right)$ függvény esetén a hatékony tőkeintenzitás növekedése $\bar{y}$ növekedését eredményezi, és ekkor az egy főre eső GDP az exogén technikai haladás rátájánál gyorsabban növekszik. $\bar{k}$ csökkenése esetén fordított a helyzet.

Hosszú távú egyensúlyban $\bar{k}$ és $\bar{y}$ nagysága konstans, $\hat{\bar{y}} = 0$, így az egy főre eső GDP növekedési rátáját, a (4) egyenlet szerint, az exogén technikai haladás üteme határozza meg. Konstans fogyasztási hányad esetén az egy főre eső fogyasztás is ugyanezen ráta szerint növekszik. Ha tehát az egy főre eső fogyasztást tekintjük az életszínvonal indikátorának, akkor ennek egyensúlyi növekedési rátáját az exogén technikai haladás üteme határozza meg.

Jelölje n a termelés rendelkezésére álló munka, illetve a népesség exogén növekedési ütemét. Ha feltesszük, hogy ezek aránya változatlan, akkor azonos ráta szerint növekednek. Jelölje továbbá δ az amortizációs rátát, s pedig a megtakarítási határhajlandóságot. Utóbbi egybeesik a megtakarítási hányaddal, mivel feltevéseink szerint a megtakarítások nagysága a GDP-vel egyenesen arányos. Ekkor a hatékony tőkeintenzitás mozgásegyenlete az alábbi:

$$\dot{\bar{k}} = sf\left(\bar{k}\right) - (m+n+\delta)\bar{k}. \tag{5}$$

Az (5) differenciálegyenlet levezetése megtalálható pl. Acemoglu (2008) könyvében. Érdemes szemügyre venni az $s = 0$ esetet. Ekkor a hatékony tőkeintenzitás $m+n+\delta$ ráta szerint amortizálódik. Hosszú távú egyensúlyban a beruházásoknak ezt az amortizációs veszteséget kell pótolniuk, teljesülnie kell tehát az alábbi egyensúlyi feltételnek:

$$s \cdot f\left(\bar{k}\right) = (m + n + \delta)\bar{k} \,. \tag{6}$$

Az egyensúlyi növekedési pálya egzisztenciájának, unicitásának és stabilitásának elegendő feltétele a (2) aggregált termelési függvény jól viselkedő volta, azaz az Inada (1964) cikkében adott feltételek teljesülése. Érdemes ezeket részletesen felsorolni:

1. A tőke határtermelékenysége pozitív, és csökkenő, azaz $f'\left(\bar{k}\right) > 0$ és $f''\left(k\right) < 0$.
2. A hatékony tőkeintenzitás növekedésével a tőke határtermelékenysége nullához tart, azaz $\lim\limits_{\bar{k}\to\infty} f'\left(\bar{k}\right) = 0$.
3. A hatékony tőkeintenzitás csökkenésével a tőke határtermelékenysége végtelenbe tart, azaz $\lim\limits_{\bar{k}\to 0} f'\left(\bar{k}\right) = \infty$.
4. Tőke nélkül nem lehet termelni, azaz $f\left(0\right) = 0$.
5. Az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás felülről nem korlátos, azaz $\lim\limits_{\bar{k}\to\infty} f\left(\bar{k}\right) = \infty$.

Könnyű megmutatni, hogy a lineárisan homogén, $Y = AK^{\alpha}\bar{L}^{1-\alpha}$ alakú, Cobb–Douglas-típusú termelési függvény a fenti feltételeket kielégíti, ha $0 < \alpha < 1$. A (4) egyenletből következik, hogy hosszú távú egyensúly esetén a GDP növekedési üteme $m + n$, amit a továbbiakban természetes növekedési rátának fogunk nevezni. A további elemzés szempontjából érdekes lesz még a kamatláb (r) és a bérráta[1] (w) nagyságának meghatározódása. Ha a tőke és munka díjazása határterméken történik, akkor

$$r = f'\left(\bar{k}\right) - \delta \text{ és } w = \left[f\left(\bar{k}\right) - \bar{k}f'\left(\bar{k}\right)\right]e^{mt} \,. \tag{7}$$

A fenti összefüggések levezetése megtalálható például Barro–Sala-i-Martin (1995) könyvében. Ezekből következik, hogy a hatékony tőkeintenzitás csökkenése esetén a reálkamatláb növekszik, a $w \cdot e^{-mt}$ reálbérszint pedig csökken. Az első

[1] Tekintve, hogy Solow modellje reálmodell, nincs értelme a nominálbér és reálbér, illetve a nominális kamat és reálkamat megkülönböztetésének.

állítás a második Inada-feltételből adódik, a második állítás pedig a $d\left(w \cdot e^{-mt}\right)/d\bar{k} = f'\left(\bar{k}\right) - f'\left(\bar{k}\right) - \bar{k}f''\left(\bar{k}\right) > 0$ deriváltból. Mivel hosszú távú egyensúlyban $\bar{k}$ változatlan, a kamatláb is konstans, a reálbér pedig a technikai haladás ütemével megegyező ráta szerint növekszik. Jól viselkedő termelési függvény esetén ennél gyorsabb ütemben növekszik a reálbér, ha $\bar{k}$ nő, ugyanakkor a kamatláb csökken.

2. Demográfiai sokk az alapmodellben

Mindezek után szemügyre vehetjük, miként hat egy demográfiai sokk az egyensúlyi pálya mentén növekvő gazdaságra. Ha a termelés rendelkezésére álló munka mennyisége megnő, ez $\bar{k}$ egyensúlyi szint alá történő csökkenéséhez vezet. Egyidejűleg $\bar{y}$ is csökken, ami a (4) összefüggés szerint az egy főre eső GDP visszaesése révén valósul meg. Láttuk továbbá, hogy a reálbér szintje a hatékony tőkeintenzitás csökkenése esetén csökken. Mivel a migrációs sokk a gazdaságot kimozdította az egyensúlyi növekedési pályáról, a visszatérés során az egységnyi hatékony munkára eső kibocsátás háromféle célra kerül felhasználásra:

1. A hatékony tőkeintenzitás amortizációjának pótlása: $(m + n + \delta)\bar{k}$.
2. A hatékony tőkeintenzitás növelése: $\dot{\bar{k}} > 0$.
3. Az egységnyi hatékony munkára eső fogyasztáshoz szükséges javak előállítása: $C/\bar{L}$.

Összeadva a három fenti tételt, $\bar{y} = f\left(\bar{k}\right) = (m + n + \delta)\bar{k} + \dot{\bar{k}} + C/\bar{L}$ adódik. Mindkét oldalból kivonva a jobb oldalon álló utolsó tagot: $(Y - C)/\bar{L} = sf\left(\bar{k}\right) = (m + n + \delta)\bar{k} + \dot{\bar{k}}$, amiből:

$$\bar{y} = f\left(\bar{k}\right) = (m + n + \delta)\bar{k} + \dot{\bar{k}} + \frac{C}{\bar{L}} . \tag{8}$$

A (8) egyenlet a hatékony tőkeintenzitás (5) mozgásegyenletével ekvivalens, ami ezek szerint egy mérlegösszefüggés: a gazdaság dinamikus erőforráskorlátja. Ez az oka annak, hogy Solow modellje egy rendkívül robosztus összefüggést ír le.

Mivel a bevándorlási sokk nem eredményezi n tartós emelkedését, a sokk elmúltával az (5) mozgásegyenlet visszavezeti a gazdaságot a korábbi egyensúlyi növekedési pályára. Ennek során $\dot{k} > 0$. Így $\bar{y}$ is növekszik, ami az egy főre eső GDP és fogyasztás, valamit a reálbér egyensúlyinál gyorsabb növekedését vonja maga után. Ez a gyorsabb növekedés azonban csak a korábban elhagyott egyensúlyi növekedési pálya eléréséig tart.

A migrációs sokk ezek szerint nem érinti az egyensúlyi növekedési pályát. A gazdaság ugyan letér róla, de visszavezeti oda a neoklasszikus egyensúlyteremtő mechanizmus, melyet az (5) mozgásegyenlet reprezentál. Figyelembe véve e mechanizmus lassú működését, ugyanakkor azt kell mondanunk, hogy a migrációs sokk társadalmi költségei jelentősek: átmenetileg csökken mind az egy főre eső GDP, mind pedig a reálbér. Az egy főre eső fogyasztás azonban nem feltétlen csökken. Ha a megtakarítási hányad a felhalmozás aranyszabályához[2] tartozó értéket meghaladja, azaz $f'(\bar{k}) < m + n + \delta$, akkor az egy főre eső fogyasztás átmenetileg emelkedik. Ennek forrását a kamatláb növekedése révén emelkedő tőkejövedelmek képzik.

Más a helyzet migrációs nyomás esetén, amikor a bevándorlás következményeként n értéke megnő, s magasabb szinten stabilizálódik. Ez a GDP természetes növekedési rátájának emelkedését eredményezi. Mivel azonban y egyensúlyi növekedési rátája az exogén technikai haladás ütemével egyenlő, az egy főre eső GDP egyensúlyi növekedési rátája nem változik, sőt annak szintje a hatékony tőkeintenzitás egyensúlyi értékének csökkenése miatt csökken.

Az utóbbi állítás igazolása és számszerűsítése érdekében az egy főre eső kibocsátásnak a népesség növekedési rátája szerint vett rugalmasságát az exogén technikai haladás figyelmen kívül hagyása mellett határozzuk meg, azaz feltesszük, hogy $m = 0$. A (6) összefüggésből következik, hogy a tőkeintenzitás egyensúlyi nagysága, melyet most k^* jelöl, más paraméterértékek mellett a népesség növekedési ütemétől is függ, azaz $k^* = k^*(n)$. Felhasználva az egy főre eső kibocsátás meghatározásához az intenzív termelési függvényt: $y^* = f\left(k^*(n)\right)$, amiből:

$$\frac{\partial y^*}{\partial n} = f'\left(k^*\right)\frac{\partial k^*}{\partial n}. \tag{9}$$

A jobb oldalon álló parciális derivált meghatározásához induljunk ki a (6) egyensúlyi feltételből, mely ezúttal: $s \cdot f\left(k^*\right) = (n + \delta)k^*$. Mindkét oldalt n szerint deriválva kapjuk, hogy

[2] A felhalmozás aranyszabályát Phelps (1966) vezette be.

$$s\cdot f'\left(k^*\right)\frac{\partial k^*}{\partial n}=k^*+(n+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial n} \quad \text{amiből:}$$

$$\frac{\partial k^*}{\partial n}=\frac{k^*}{s\cdot f'\left(k^*\right)-(n+\delta)}\approx-\frac{k^*}{(n+\delta)(1-s)},$$

ahol a közelítő egyenlőség felírása során feltételeztük, hogy a gazdaság az $f'\left(k^*\right)=n+\delta$ egyenlőség révén meghatározott aranykori növekedési pályán van. Behelyettesítve a (9) egyenletbe az egy főre eső GDP n szerint vett rugalmassága:

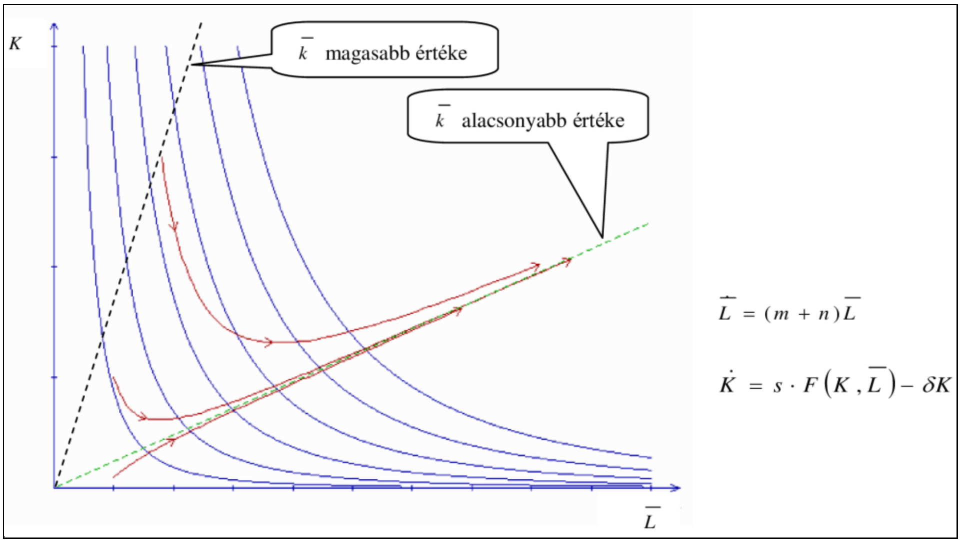
$$\varepsilon_n^{y^*}=\frac{\partial y^*}{\partial n}\cdot\frac{n}{y^*}=-\frac{n\cdot k^*\cdot f'\left(k^*\right)}{y^*(n+\delta)(1-s)}=-\frac{f'\left(k^*\right)}{\frac{y^*}{k^*}}\cdot\frac{n}{(n+\delta)(1-s)}.$$

A jobb oldalon álló első tényező a tőke parciális termelési rugalmassága. Ennek értéke a legtöbb gazdaságban: 1/3. Mivel neoklasszikus modellünkben a beruházások nagyságát a megtakarítások határozzák meg, s értékének kalibrálásához leghelyesebb az I/S beruházási hányadot alapul venni. Legyen $s=0{,}25$, az amortizációs ráta pedig Kónya (2015) nyomán 0,025. Ha a népesség 0,5%-os növekedési ütemével számolunk, $\varepsilon_n^{y^*}=0{,}074$. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a migrációs nyomás következtében a népesség növekedési üteme 20%-kal, $n=0{,}006$-ra nő, ennek következtében az egy főre eső GDP 1,48%-kal csökken.

Figyelembe véve továbbá a (4) összefüggést, az egyik egyensúlyi helyzetből a másikba történő átmenet során az egy főre eső GDP növekedési rátája az exogén technikai haladás üteme alá esik. Ezenfelül a hatékony tőkeintenzitás csökkenésével a tőke határtermelékenysége növekszik, ami a (7) összefüggés szerint a kamatláb emelkedéséhez vezet.

Még azt kell tisztázni, miként hat a migrációs nyomás a beruházásokra. Mivel $\bar{k}$ definíciójából adódóan: $\hat{K}=\hat{\bar{k}}+m+n$, egyensúlyban a tőkeállomány a GDP-vel megegyező, természetes ráta szerint növekszik, a növekedés tehát kiegyensúlyozott. A migrációs nyomás következtében kialakuló új egyensúlyi helyzetbe történő átment során $\bar{k}$ visszaesése miatt a tőkeállomány a természetes rátánál alacsonyabb ütemben növekszik. Sőt, számítógépes szimulációval reprodukálva Solow cikkének VI. ábráját, a tőkeállomány átmeneti csökkenését láthatjuk (1. ábra). A szimuláció során használt, (5) mozgásegyenletet helyettesítő, azzal ekvivalens kétváltozós dinamikus rendszert az ábra mellett adtuk meg.

1. ábra Egyensúlyi alkalmazkodás az izokvant rendszerben



Forrás: saját szerkesztés

E dinamikus rendszer fázissík-diagramját a (2) termelési függvény izokvant rendszerében kapjuk. Az izokvantokat az 1. ábrán fel is tüntettük, így látható, hogy $\bar{k}$ csökkenése során a kibocsátás nem csökken, a tőkeállomány azonban átmenetileg visszaesik: az átmeneti időszak elején a vállalatok az amortizációs veszteséget sem pótolják. Ez azért van így, mert a gyorsabban növekvő munkafelhasználás a termelést ugyan bővíti, de a fogyasztási hányad változatlan szinten tartása szükségessé teszi a beruházások átmeneti leállítását. A változatlan fogyasztási hányad feltevésének feloldásával valószínűleg más eredményt kapnánk, ezzel azonban kilépnénk Solow modelljének keretei közül, ami jelen tanulmányban nem célunk. Megjegyzendő még, hogy az 1. ábrán a hosszú távú egyensúly nem egy pontban adódik, hanem oly módon, hogy a szimulált pályagörbék rásimulnak valamelyik origóból húzott egyenesre. Ennek meredekségét $\bar{k}$ egyensúlyi nagysága határozza meg.

3. Endogén növekedés és a gazdaság összeomlása

Az eddigieknél érdekesebb következtetésekre jutunk az Inada-feltételek részleges feloldása révén. Ezt legegyszerűbben egy CES-típusú termelési függvény bevezetésével tehetjük meg, mely példa gyanánt Solow (1956) cikkében is megjelenik, igaz a technikai haladás figyelmen kívül hagyásával. Igen jó összefoglaló található a CESfüggvényekről Zalai (2012) könyvében. Figyelembe véve az exogén technikai haladást, az aggregált termelési függvényt az alábbi módon írhatjuk fel:

$$Y = F\left(K, \bar{L}\right) = A\left[a(bK)^{\psi} + (1-a)\left((1-b)\bar{L}\right)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}}, \tag{10}$$

ahol a $\psi < 1$ paraméter a tőke és hatékony munka közti helyettesítés rugalmasságát határozza meg: $\sigma = 1/(1-\psi)$. A kifejezés $\psi = 0$-ra nincs értelmezve, de megmutatható, hogy $\psi \to 0$ esetén a (10) formula a jól viselkedő Cobb–Douglas-függvényhez tart.

A további vizsgálatok során célszerű szem előtt tartani azon korábbi felismerést (Klump–de La Grandville 2000), mely szerint egy gazdaság növekedési lehetőségei annál kedvezőbbek, minél magasabb a helyettesítés rugalmassága. Érdemes továbbá megjegyezni, hogy a CES termelési függvény intenzív formája:

$$\bar{y} = f\left(\bar{k}\right) = A\left[a\left(b\bar{k}\right)^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}\right]^{\frac{1}{\psi}}, \tag{11}$$

a tőke határtermelékenysége pedig

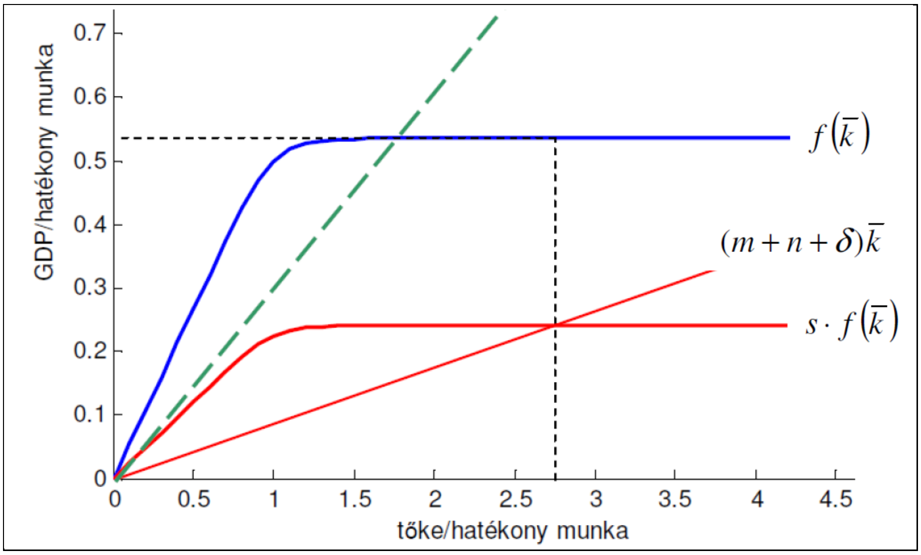
$$f'\left(\bar{k}\right) = Aab^{\psi}\left[ab^{\psi} + (1-a)(1-b)^{\psi}\bar{k}^{-\psi}\right]^{\frac{1-\psi}{\psi}}. \tag{12}$$

Vizsgálódásainkat azzal az esettel kezdjük, amikor a termelésben a tőke és a munka egymással könnyen helyettesíthető. Ekkor a helyettesítés rugalmassága egynél nagyobb, és így $0 < \psi < 1$. Ebben az esetben egyrészt a 4. Inada-feltétel sérül, tehát tőke nélkül is lehet termelni: $f(0) = A(1-a)^{1/\psi}(1-b) > 0$. Másrészt sérül a 2. feltétel: $\bar{k}$ növekedésével a tőke határtermelékenysége nem nullához, hanem egy a függvény paraméterei által meghatározott pozitív konstanshoz tart: $\lim_{\bar{k}\to\infty} f'\left(\bar{k}\right) = Aba^{1/\psi} > 0$. Ebből következik, hogy az $s \cdot f\left(\bar{k}\right)$ görbéhez húzható érintő meredeksége egyetlen pontban sem eshet az $sAba^{1/\psi}$ érték alá. Ha tehát $sAba^{1/\psi} > m + n + \delta$, akkor a hosszú távú egyensúly (6) feltétele $\bar{k}$ semmilyen értékére sem teljesül, a hatékony tőkeintenzitás pedig mindenkor növekszik. Ez azt jelenti, hogy $\bar{y}$ is mindenkor nő. Ez az endogén növekedés állapota, az egy főre eső GDP növekedési rátája az $sAba^{1/\psi} - (n+\delta) > m$ értékhez tart, tehát az exogén technikai haladás ütemét meghaladja. Ugyanakkor a GDP növekedési rátája is meghaladja a természetes növekedési rátát.

Ha ebben a helyzetben a népesség növekedési rátája megemelkedik, ez az $sAba^{1/\psi} > m+n+\delta$ egyenlőtlenség irányának megfordulását vonhatja maga után. Ekkor az endogén növekedést exogén növekedés váltja fel, s az egy főre eső GDP csupán az exogén technikai haladás rátája szerint növekszik. A népesség magasabb növekedési ütemét eredményező migrációs nyomás ezek szerint véget vethet a gyorsabb endogén növekedésnek. Megjegyzendő, hogy a demográfiai sokk ezen következménye, ha kedvezőnek nem is tekinthető, semmiképp nem végzetes: a gazdaság stabil növekedési pályára kerül csakúgy, mint a 2. szakaszban tárgyalt jól viselkedő termelési függvény esetén.

Drámaibb következtetések adódnak a gazdasági növekedés szempontjából kedvezőtlenebb $\psi < 0$ esetben. A helyettesítés rugalmassága most egységnyinél kisebb: a tőke és munka a termelésben egymással nehezebben helyettesíthető. Az Inada-feltételek közül ez a 3. megsértését jelenti, amennyiben az $f(\bar{k})$ görbéhez húzható érintő maximális meredeksége $Aba^{1/\psi}$. Ha tehát $sAba^{1/\psi} < m+n+\delta$, akkor a gazdaság nem kerülhet egyensúlyi növekedési pályára, a hatékony tőkeintenzitás (5) mozgásegyenletében a jobb oldali kifejezés $\bar{k}$ bármely értéke esetén negatív, így a hatékony tőkeintenzitás csökken és $\bar{y}$ is csökken. Ez azt jelenti, hogy az egy főre eső GDP az exogén technikai haladás rátájánál alacsonyabb ütemben növekszik, sőt, ha az $sAba^{1/\psi} - (m+n+\delta)$ különbség jelentős, az egy főre eső GDP csökkenhet is, és a gazdaság egy az összeomlás felé tartó pályára kerül. Az elmondottakat a 2. ábra illusztrálja, ahol a népesség magasabb növekedési rátájához tartozó $(m+n+\delta)\bar{k}$ egyenest szaggatott vonallal rajzoltuk be. Mint látható, ez végig az $sf(\bar{k})$ görbe felett halad, így a hatékony tőkeintenzitás csökken, sőt nullához tart. Mivel ez a folyamat a tőkeállomány leépülését jelenti, az endogén növekedésnek ezt a negatív esetét a gazdaság összeomlásához vezető növekedési pályaként értelmezzük. Erre a pályára tehát az $(m+n+\delta)\bar{k}$ egyenes migrációs nyomás hatására bekövetkező elfordulásának eredményeként kerül a gazdaság.

2. ábra Exogén növekedés és a gazdaság összeomlása



Forrás: saját szerkesztés

4. Összegzés és további kutatási irányok

Ebben a tanulmányban egy demográfiai sokk várható következményeit mértük fel Solow neoklasszikus modelljének gondolati rendszerében. Az elemzés aktualitását a jelenleg is zajló migrációs folyamatok adják. Főbb következtetéseink az alábbiak:

Ha egy demográfiai sokk következtében a termelés rendelkezésére álló munka mennyisége gyorsabb ütemben nő, ez a természetes növekedési ráta emelkedése révén a GDP magasabb egyensúlyi növekedési rátáját eredményezi. Más a helyzet az egy főre eső GDP esetében: ennek egyensúlyi növekedési rátája a termelés rendelkezésére álló munka gyorsabb növekedése esetén sem változik. A migrációs nyomás következtében azonban az egy főre eső GDP elhagyja a korábbi egyensúlyi növekedési pályát, és egy az egy főre eső kibocsátás alacsonyabb értékével jellemezhető, új pályát követve növekszik tovább.

A helyettesítés nagyfokú rugalmassága esetén a modellben endogén növekedés lehetséges. Ebben az esetben a GDP a természetes rátánál gyorsabb ütemben növekszik. A migrációs nyomás következtében fellépő demográfiai sokk azonban az endogén növekedés leépülését és a természetes ráta szerint történő exogén növekedés kialakulását eredményezheti.

Rosszabb a helyzet a helyettesítés egységnyinél kisebb rugalmassága esetén. Ekkor a legjobb esetben is csak a természetes rátának megfelelő exogén növekedés alakulhat ki, ám erőteljesebb demográfiai sokk hatására a gazdaság az összeomlás felé tartó, negatív endogén növekedési pályára kerülhet, amint ezt a 2. ábra bemutatja.

A fenti következtetésekhez azon feltevés mellett jutottunk, mely szerint a népesség növekedési üteme megegyezik a gazdaság rendelkezésére álló munka növekedési ütemével. Ez azonban egyrészt a befogadó társadalom elöregedése, másrészt a migránsok integrációjának változó időszükséglete miatt irreális: a termelés rendelkezésére álló munka növekedési rátájának a fellépő demográfiai sokk következtében várható változása nem írható le egy egyszeri ugrással. A pontosabb becsléshez szükséges adatok azonban egyelőre nem állnak rendelkezésre. Egy ilyen becslésen alapuló $n(t)$ függvénynek a fenti modellbe történő bevezetése minden bizonnyal érdekes további következtetésekre vezetne, ám ugyanakkor szét is feszítené Solow neoklasszikus gondolati rendszerének kereteit.

Felhasznált irodalom

Acemoglu, D. (2002): Directed Technical Change. *The Review of Economic Studies*, 69, 4, pp. 781–809.

Acemoglu, D. (2008): *Introduction to modern ecomonic growth*. Princeton University Press, Princeton, New Yersey.

Barro, R. J. – Sala-i-Martin, X. (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill, New York.

Cigno, A. (1981): Growth with Exhaustible Resources and Endogenous Population. *Review of Economic Studies,* 48, 2, pp. 281–287.

Domar, E. D. (1946): Capital Expansion Rate of Growth and Employment. *Econometrica*, 14, 2, pp. 137–147.

Harrod, R. F. (1948): *Towards a Dynamic Economics*. Macmillan, London.

Inada, K. (1964): On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. *Review of Economic Studies*, 30, 2, pp. 119–127.

Jones, C. I. (2001): *Introduction to Economic Growth*. W. W. Norton & Company, Inc., New York.

Klump, R. – de La Grandville, O. (2000): Economic Growth and the Elasticity of Substitution: Two Theorems and Some Suggestions. *American Economic Review*, 90, 1, pp. 282–291.

Klump, R. – McAdam, P. – Willman, A. (2007): Factor Substitution and Factor-Augmenting Technical Progress in the United States: a Normalized Supply-side System approach. *The Review of Economics and Statistics*, 89, 1, pp. 183–192.

Kónya I. (2015): *Az RBC-DSGE modellcsalád és a munkapiac makroökonómiája. Fejezetek a haladó makroökonómiából*. Pécs, Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar.

McCandless, G. (2008): *The ABCs of RBCs – An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Harvard University Press, USA.

Romer, D. (2006): *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill, New York.

Solow, R. M. (1956): A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quartely Journal of Economics*, 70, 1, pp. 65–94.

Solow, R. M. (1970): *Growth Theory: An Exposition*. Oxford University Press, Oxford.

Uzawa, H. (1960): Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium. *Review of Economic Studies*, 28, 2, pp. 117–24.

Williamson, S, D. (2009): *Makroökonómia*. Osiris Kiadó, Budapest.

Zalai E. (2012): *Matematikai közgazdaságtan II. Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések*. Akadémiai Kiadó, Budapest.